4 Programma's met Input/Output

- Programmagedrag als transformatie van input naar output
- Rekenen op de getallenlijn en in het getallenrooster
- Paden, van input op weg naar output

4.1 Acties en effecten

Gegeven een verzameling A van acties wordt een *input/outputmodel* bepaald door de volgende drie soorten ingrediënten:

- Een verzameling V van toestanden.
- Voor elke actie $a \in A$ een functie

$$effect_a : V \to V.$$

- Voor elke actie $a \in A$ een functie

$$y_a : V \to \{\text{true}, \text{false}\}.$$

4.1 Acties en effecten

Gegeven een input/outputmodel bepaalt een gedrag P op de volgende manier een input/outputafbeelding $P\bullet : V \to V \cup \{D\}$.

1. $D \bullet v = D$,
2. $S \bullet v = v$,
3. $(a \circ P) \bullet v = P \bullet \mathit{effect}_a(v)$,
4. $(P \trianglelefteq a \trianglerighteq Q) \bullet v = \begin{cases} (a \circ P) \bullet v & \text{indien } y_a(v) = \mathsf{true}, \\ (a \circ Q) \bullet v & \text{anders.} \end{cases}$

Afspraak: $P \bullet v = D$ precies dan als voor alle $n \in \mathbb{N}$, $\pi_n(P) \bullet v = D$.

4.1 Acties en effecten

Voor ieder input/outputmodel F over toestandsruimte V is er een *equivalentie* $\equiv_{ioF}$ op programmaobjecten met

$$X \equiv_{ioF} Y \Leftrightarrow \text{voor alle } v \in V,\ |X| \bullet v = |Y| \bullet v.$$

Merk op:

- $\equiv_{ioF}$ identificeert alle programma's die in inactie eindigen,
- $\equiv_{ioF}$ is geen congruentie (komen we later op terug).

4.2 Rekenen op de getallenlijn

F_{int} is het input/outputmodel met

$$A = \{succ, pred, pos, neg, zero\}$$

$$V = \{\ldots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

We nemen als effectfuncties:

$$\begin{array}{rclcrcl}
effect_{succ}(v) & = & v+1, & \quad & effect_{pos}(v) & = & v, \\
effect_{pred}(v) & = & v-1, & \quad & effect_{neg}(v) & = & v, \\
 & & & \quad & effect_{zero}(v) & = & v,
\end{array}$$

4.2 Rekenen op de getallenlijn

en als yieldfuncties:

$$y_{succ}(v) = y_{pred}(v) = \mathsf{true},$$

$$y_{pos}(v) = \begin{cases} \mathsf{true} & \text{als } v > 0, \\ \mathsf{false} & \text{anders,} \end{cases} \qquad y_{neg}(v) = \begin{cases} \mathsf{true} & \text{als } v < 0, \\ \mathsf{false} & \text{anders,} \end{cases}$$

$$y_{zero}(v) = \begin{cases} \mathsf{true} & \text{als } v = 0, \\ \mathsf{false} & \text{anders.} \end{cases}$$

4.2 Rekenen op de getallenlijn

We kunnen F_{int} gebruiken om te rekenen op de getallenlijn:

$$\begin{aligned}
|succ; succ; !| \bullet -3 &= (succ \circ succ \circ S) \bullet -3 \\
&= (succ \circ S) \bullet \mathit{effect}_{succ}(-3) \\
&= (succ \circ S) \bullet -2 \\
&= S \bullet -1 \\
&= -1.
\end{aligned}$$

In het algemeen: $|succ; succ; !| \bullet k = k + 2$.

4.2 Rekenen op de getallenlijn

$$
\begin{aligned}
|(+zero;!;succ)^\omega| \bullet 3 &= (S \trianglelefteq zero \trianglerighteq succ \circ |(+zero;!;succ)^\omega|) \bullet 3 \\
&= (succ \circ |(+zero;!;succ)^\omega|) \bullet 3 \\
&= |(+zero;!;succ)^\omega| \bullet 4 \\
&= |(+zero;!;succ)^\omega| \bullet 5 \\
&\vdots \\
&= D.
\end{aligned}
$$

In het algemeen:

$$
|(+zero;!;succ)^\omega| \bullet k = \begin{cases} 0 & \text{als } k \leq 0, \\ D & \text{anders.} \end{cases}
$$

4.2 Rekenen op de getallenlijn

Twee simpele voorbeelden van F_{int}-identiteiten zijn:

$$\begin{aligned} succ; pred; ! &\equiv_{ioF_{int}} !, \\ succ^{\omega} &\equiv_{ioF_{int}} \#0. \end{aligned}$$

Gevolg: $\equiv_{ioF_{int}}$ is geen congruentie. Bv.

$$\#3; succ; pred; ! \not\equiv_{ioF_{int}} \#3; !.$$

4.3 Paden, van input op weg naar output

Volledige paden hebben één van de volgende drie vormen:

$$v_0, \ldots, v_k, \surd \text{ voor } k \in \mathbb{N} \text{ en } v_i \in V$$

Bv.

$$S \bullet^{vpad} v = v, \surd$$

$$|a; !| \bullet^{vpad} v = v, \mathit{effect}_a(v), \surd$$

$$|pred; pred; !| \bullet^{vpad} -3 = -3, -4, -5, \surd$$

4.3 Paden, van input op weg naar output

$$v_0, \ldots, v_k, D \text{ voor } k \in \mathbb{N} \text{ en } v_i \in V$$

Bv.

$$D \bullet^{vpad} v = v, D$$

$$(a \circ D) \bullet^{vpad} v = v, \mathit{effect}_a(v), D$$

$$|succ; succ| \bullet^{vpad} -3 = -3, -2, -1, D$$

4.3 Paden, van input op weg naar output

$$v_0, \ldots, v_k, \ldots \text{ voor } k \in \mathbb{N} \text{ en } v_i \in V$$

Bv.

$$|succ^\omega| \bullet^{vpad} 3 = 3, 4, 5, \ldots$$

$$|(succ; pred)^\omega| \bullet^{vpad} 3 = 3, 4, 3, 4, 3, 4, \ldots$$

$$|(-zero; pred)^\omega| \bullet^{vpad} 3 = 3, 3, 2, 2, 1, 1, 0, 0, 0, \ldots$$

4.3 Paden, van input op weg naar output

Volledige stottervrije paden:

$$|pred; pred; !| \bullet^{vsvpad} -3 = -3, -4, -5, \surd$$

$$|succ; pred| \bullet^{vsvpad} -3 = -3, -2, -3, D$$

$$|succ^{\omega}| \bullet^{vsvpad} 3 = 3, 4, 5, \ldots$$

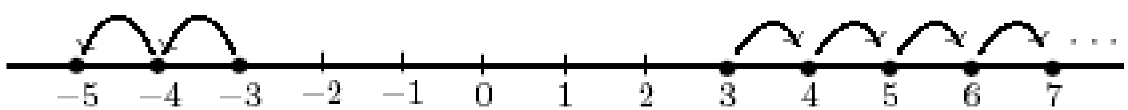
$$|(succ; pred)^{\omega}| \bullet^{vsvpad} 3 = 3, 4, 3, 4, 3, 4, \ldots$$

$$|(-zero; pred)^{\omega}| \bullet^{vsvpad} 3 = 3, 2, 1, 0$$

4.3 Paden, van input op weg naar output

Sommige paden kun je aardig illustreren, bv.

- $-3, -4, -5, \surd$
- $3, 4, 5, \ldots$



4.4 Rekenen in het getallenrooster

F_{int^2} is het input/outputmodel met

$$A = A_{move} \cup A_{test}$$

$$V = \{\langle n, m\rangle \mid n, m \in \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 \ldots\}\}$$

4.4 Rekenen in het getallenrooster

waar

$$A_{move} = \{mup, mdown, mleft, mright\}$$

met $\mathit{effect}_{mup}(\langle x, y\rangle) = \langle x, y+1\rangle$ etc., en voor $a \in A_{move}$

$$y_a(\langle x, y\rangle) = \mathsf{true}$$

4.4 Rekenen in het getallenrooster

en

$$A_{test} = \{xpos, xnull, xneg, ypos, ynull, yneg, diag, codiag\}$$

met

$xpos$ ($ypos$)	(levert true indien $x > 0$ ($y > 0$) en anders false),
$xnull$ ($ynull$)	(levert true als $x = 0$ ($y = 0$) en anders false),
$xneg$ ($yneg$)	(levert true als $x < 0$ ($y < 0$) en anders false),
$diag$	(*diagonaal*, levert true als $x = y$ en anders false),
$codiag$	(*codiagonaal*, levert true als $x = -y$ en anders false),

en voor $a \in A_{test}$

$$effect_a(\langle x, y\rangle) = \langle x, y\rangle.$$

4.4 Rekenen in het getallenrooster

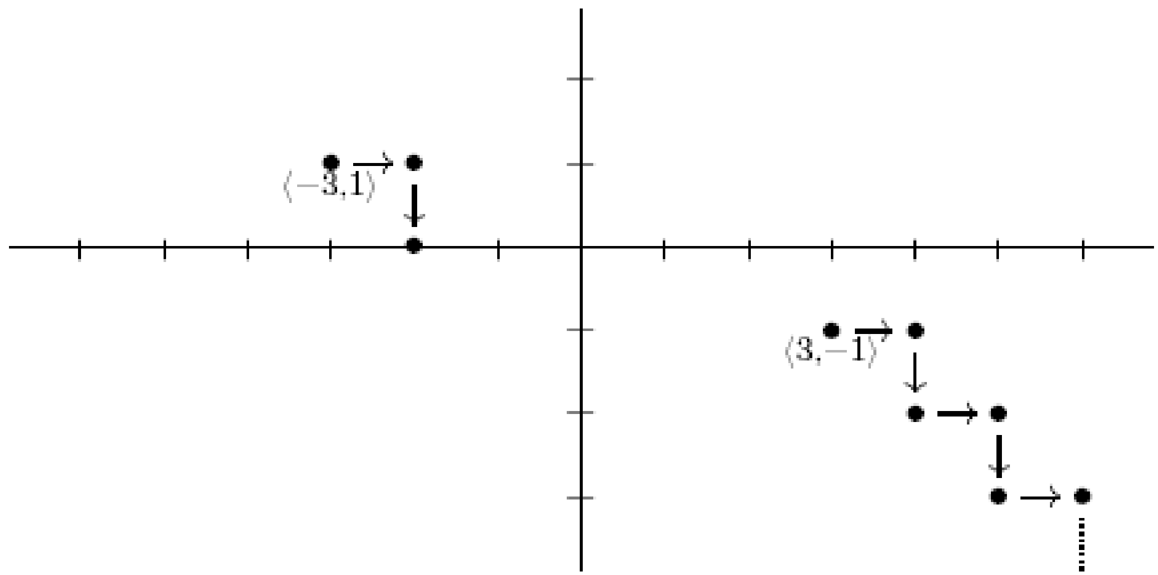
Voorbeeld: $X = (+ynull; !; mright; mdown)^\omega$

$|X| = S \trianglelefteq ynull \trianglerighteq mright \circ mdown \circ |X|$

$|X| \bullet^{vsvpad} \langle -3, 1 \rangle = \langle -3, 1 \rangle, \langle -2, 1 \rangle, \langle -2, 0 \rangle, \surd$

$|X| \bullet^{vsvpad} \langle 3, -1 \rangle = \langle 3, -1 \rangle, \langle 4, -1 \rangle, \langle 4, -2 \rangle, \langle 5, -2 \rangle, \langle 5, -3 \rangle, \ldots$

4.4 Rekenen in het getallenrooster



4.4 Rekenen in het getallenrooster

Een ander voorbeeld:

$$Y = (+ynull; !; +ypos; \#2; \#4; mright; mdown; \#3; mleft; mup)^{\omega}.$$

$$|Y| = S \trianglelefteq ynull \trianglerighteq (mright \circ mdown \circ |Y| \trianglelefteq ypos \trianglerighteq mleft \circ mup \circ |Y|),$$

$$|Y| \bullet \langle x, y \rangle = \langle x + y, 0 \rangle.$$