3 Gedragsexpressies voor Programma's met Inactie

- Gedrag (semantiek): gedragsexpressies en oneindig gedrag
- Vergelijkingen voor gedragsexpressies
- Equivalentie en congruentie voor gedragsexpressies

3 Gedragsexpressies voor Programma's met Inactie

Twee programma's kunnen gelijk gedrag vertonen en toch niet structureel congruent zijn. Bv.:

$+a;!;!$ en $a;!;!$ en $-a;!;!$ en $a;!$,

$+a;\#1$ en $a;\#1$ en $-a;\#1$,

$\#2;u;!$ en $!;u;!$,

a^ω en $+a^\omega$ en $-a^\omega$ (er 'gebeurt' steeds een a),

$+a;u^\omega$ en $a;u^\omega$ en $-a;u^\omega$.

3.1 Primitieven van BPPA

- BPPA (basic polarized process algebra) is gebaseerd op een collectie A van basisinstructies.

- De elementen van A worden *acties* genoemd.

- BPPA heeft als primitieven twee constanten om terminatie en inactie te modelleren, en twee methoden van samenstelling (operatoren) om grotere *gedragsexpressies* te kunnen maken.

3.1 Primitieven van BPPA

Terminatie. S (stop)

Inactief gedrag. D (divergentie of inactie)

Postconditionele compositie. Voor elke actie $a \in A$ en gedragsexpressies P en Q

$$P \trianglelefteq a \trianglerighteq Q$$

Actieprefix. Voor elke $a \in A$ en gedragsexpressie P

$$a \circ P$$

Afspraak: $a \circ P = P \trianglelefteq a \trianglerighteq P$.

3.1 Primitieven van BPPA

- S en D zijn bevat in BPPA voor elke keuze van A.
- Elk gedrag wordt verkregen uit S en/of D door middel van postconditionele compositie.
- Een enkel element van A is geen gedragsexpressie.

Voorbeeld:

$$S \trianglelefteq a \trianglerighteq (S \trianglelefteq b \trianglerighteq (c \circ D)).$$

Afspraak: actieprefix *bindt sterker* dan postconditionele compositie (dus we mogen

$$S \trianglelefteq a \trianglerighteq (S \trianglelefteq b \trianglerighteq c \circ D)$$

schrijven).

3.2 Projecties en oneindig gedrag

Projectieoperatoren op eindig gedrag:

$$\begin{aligned}
\pi_0(P) &= D, \\
\pi_{n+1}(S) &= S, \\
\pi_{n+1}(D) &= D, \\
\pi_{n+1}(P \trianglelefteq a \trianglerighteq Q) &= \pi_n(P) \trianglelefteq a \trianglerighteq \pi_n(Q),
\end{aligned}$$

Dus

$$\pi_{n+1}(a \circ P) = a \circ \pi_n(P).$$

3.2 Projecties en oneindig gedrag

Voorbeelden (we gebruiken in herhaalde toepassingen van actieprefix geen haakjes):

$$\pi_2(a \circ D) = a \circ D,$$

$$\pi_3(b \circ S \trianglelefteq c \trianglerighteq d \circ e \circ f \circ S) = b \circ S \trianglelefteq c \trianglerighteq d \circ e \circ D,$$

$$\pi_4(c \circ D \trianglelefteq a \trianglerighteq b \circ e \circ f \circ f \circ D) = c \circ D \trianglelefteq a \trianglerighteq b \circ e \circ f \circ D.$$

3.2 Projecties en oneindig gedrag

Een *projectieve rij* $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ is een rij $P_0, P_1, P_2, \ldots$ met voor elke $n \in \mathbb{N}$:

- P_n is een eindig gedrag (dus een BPPA-expressie), en
- $\pi_n(P_{n+1}) = P_n$.

Voorbeeld:

$$D, a \circ D, a \circ a \circ D, \ldots$$

Afspraak:

$$(P_n)_{n\in\mathbb{N}} = (Q_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ als } P_n = Q_n \text{ voor alle } n \in \mathbb{N}.$$

3.3 Vergelijkingen voor gedragsextractie

Gedragsextractie op programmaobjecten:

$$
\begin{array}{rcl@{\qquad\qquad}rcl}
|!| & = & S & |!;X| & = & S \\
|a| & = & a \circ D & |a;X| & = & a \circ |X| \\
|+a| & = & a \circ D & |+a;X| & = & |X| \trianglelefteq a \trianglerighteq |\#2;X| \\
|-a| & = & a \circ D & |-a;X| & = & |\#2;X| \trianglelefteq a \trianglerighteq |X| \\
|\#k| & = & D & |\#0;X| & = & D \\
 & & & |\#1;X| & = & |X| \\
 & & & |\#k+2;u| & = & D \\
 & & & |\#k+2;u;X| & = & |\#k+1;X|
\end{array}
$$

3.3 Vergelijkingen voor gedragsextractie

Merk op: als $X =_{sc} Y$, dan geldt ook dat $|X| = |Y|$.

Enkele voorbeelden:

$$|(\#0)^\omega| = |\#0; (\#0)^\omega| = D,$$

$$\begin{aligned}
|-a; b; c| &= |\#2; b; c| \unlhd a \unrhd |b; c| \\
&= |\#1; c| \unlhd a \unrhd b \circ |c| \\
&= |c| \unlhd a \unrhd b \circ c \circ D \\
&= c \circ D \unlhd a \unrhd b \circ c \circ D.
\end{aligned}$$

3.3 Vergelijkingen voor gedragsextractie

Indien de vergelijkingen oneindig vaak kunnen worden toegepast zonder tot gedrag te leiden, spreken we af dat het geëxtraheerde gedrag gelijk is aan D.

Bijvoorbeeld:

$$|(\#1)^\omega| = |\#1;(\#1)^\omega| = |(\#1)^\omega| = \ldots = D,$$

$$|(\#2;a)^\omega| = |\#2;a;(\#2;a)^\omega| = |\#1;(\#2;a)^\omega| = |(\#2;a)^\omega| = \ldots = D.$$

3.3 Vergelijkingen voor gedragsextractie

Ook mogelijk is dat de vergelijkingen voor gedragsextractie oneindig vaak kunnen worden toegepast en zo tot een steeds groter gedrag leiden.

Bijvoorbeeld:

$$|a^\omega| = |a; a^\omega| = a \circ |a^\omega| = a \circ a \circ |a^\omega| = \ldots$$

In zulke gevallen spreken we af dat het gedrag van X wordt gerepresenteerd door de projectieve rij $(\pi_n(|X|))_{n\in\mathbb{N}}$.

3.3 Vergelijkingen voor gedragsextractie

In sommige gevallen is het aantrekkelijk een oneindig gedrag uit te drukken als een *stelsel* van één of meer gedragsvergelijkingen.

Bijvoorbeeld:

$$|(a;+b)^\omega| = a \circ |+b;(a;+b)^\omega| = a \circ (|(a;+b)^\omega| \trianglelefteq b \trianglerighteq |+b;(a;+b)^\omega|).$$

Dit gedrag, zeg P, kan overzichtelijker worden beschreven op de volgende manier:

$$\begin{aligned} P &= a \circ (P \trianglelefteq b \trianglerighteq Q), \\ Q &= P \trianglelefteq b \trianglerighteq Q. \end{aligned}$$

3.4 Equivalentie en congruentie op gedragsexpressies

- X en Y zijn *gedragsequivalent*, indien $|X| = |Y|$.
- Gedragsequivalentie van X en Y wordt genoteerd met $X \equiv_{ge} Y$.

Bijvoorbeeld:

$$\begin{aligned} |a;\#2;\#1;b;c| &= a \circ |\#2;\#1;b;c| \\ &= a \circ |\#1;b;c| \\ &= a \circ |b;c| \\ &= |a;b;c|. \end{aligned}$$

Dus $a;b;c \equiv_{ge} a;\#2;\#1;b;c$.

3.4 Equivalentie en congruentie op gedragsexpressies

- Gedragsequivalentie is geen congruentie. Bijvoorbeeld: $+a \equiv_{ge} a$, maar

$$|+a;b| = b \circ D \trianglelefteq a \trianglerighteq D \neq a \circ b \circ D = |a;b|.$$

- *Gedragscongruentie* is de grootste congruentierelatie die bevat is in gedragsequivalentie.

- Gedragscongruentie van X en Y wordt genoteerd met $X =_{gc} Y$.

- Het is bewijsbaar dat $X =_{gc} Y$ als voor alle $n, m \in \mathbb{N}$,

$$\#n; X; !^m \equiv_{ge} \#n; Y; !^m.$$